Random walks on regular polytopes

1974 J. Phys. A: Math. Nucl. Gen. 7 2152

(http://iopscience.iop.org/0301-0015/7/17/010)

J. Phys. A: Math., Nucl. Gen., Vol. 7, No. 17, 1974. Printed in Great Britain.

Marches aléatoires sur des polytopes réguliers

M L Mehta

Service de Physique Théorique, Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, BP No 2, 91190 Gif-sur-Yvette, France

Reçu le 11 Juin 1974

Résumé. On considère le mouvement aléatoire sur les sommets d'un polytope. La probabilité de passer d'un sommet à un autre dépend de la distance à franchir. Elle peut en plus dépendre des p dernières étapes (on dit alors que le mouvement est non-Markovien d'ordre p). Nous calculons la probabilité de se trouver, après n étapes, à un sommet quelconque:

(i) des trois polytopes réguliers à s dimensions pour les marches Markoviennes (ou non-Markoviennes d'ordre zéro);

(ii) du simplex à s dimensions pour les marches non-Markoviennes d'ordre un.

Abstract. We consider a random walk on the vertices of a regular polytope. The probability of going from one vertex to another depends on the distance between these vertices. It may in addition depend on the last p steps taken (we say then that the walk is non-Markovian of order p). We calculate the probability of getting to any vertex in n steps for:

(i) the three regular polytopes in s dimensions when the walk is Markovian (or non-Markovian of order zero);

(ii) a simplex in s dimensions when the walk is non-Markovian of order one.

1. Introduction

Nous considérons les déplacements aléatoires sur les sommets d'un objet régulier à s dimensions, appelé polytope. A chaque étape on a une probabilité de passer d'un sommet à un autre, et cette probabilité dépend de la distance entre les sommets. La marche est dite Markovienne si à chaque étape les probabilités ne dépendent pas des étapes précédentes. Lorsque ces probabilités dépendent des étapes précédentes, le problème est plus difficile à traiter et nous n'étudierons que le cas où la mémoire du marcheur est limitée à la dernière étape qu'il vient de franchir.

Il est commode de présenter les diverses probabilités sous forme d'un tableau carré, sur lequel on inscrit la probabilité de passer du sommet j au sommet k au croisement de la j-ième ligne et la k-ième colonne. Un tel tableau est appelé matrice de transfert. L'ordre de la matrice de transfert est égale au nombre des sommets pour les marches Markoviennes et est beaucoup plus élevé pour les autres marches.

Pour les marches Markoviennes il est possible dans chaque cas de déterminer tous les vecteurs propres de la matrice de transfert et donc de la diagonaliser. Le problème est par conséquent résolu. Pour les marches aléatoires avec mémoire d'une étape nous n'étudierons que le cas d'un simplex.

Le présent travail est motivé par un problème de la théorie des liquides. Il y a des molécules qui tournent et qui 'se souviennent' un peu de leur passé, elles peuvent être simulées par le modèle du mouvement Brownien avec mémoire sur une sphère. Comme le problème original est difficile, nous l'avons remplacé par un plus simple.

Le problème pourrait être généralisé, soit qu'on étende la mémoire à un nombre fini d'étapes, soit qu'on remplace les sommets discrets des polytopes par un espace continu comme la surface d'une sphère.

2. Les polytopes

Les polytopes à s dimensions généralisent les polygones à 2 dimensions et les polyèdres à 3 dimensions. Un polygone régulier est un objet à deux dimensions dont tous les côtés sont égaux et tous les angles sont égaux; un polyèdre régulier est un object à trois dimensions dont toutes les faces à deux dimensions sont des polygones réguliers et égaux; de même pour $s > 3$ un polytope régulier à s dimensions a toutes ses faces à $(s-1)$ dimensions régulières et égales. Le nombre des polytopes réguliers est limité (Coxeter 1948) pour $s \geqslant 3$; il vaut 5 pour $s = 3$, 6 pour $s = 4$ et 3 pour $s \geqslant 5$. Les trois polytopes réguliers à s dimensions ($s \geqslant 3$) sont les suivants:

(i) *Le simplex* est la généralisation du triangle et du tétraèdre. Si on considère un référentiel à coordonnées obliques, la direction positive de chaque axe de coordonnée étant inclinée à 60° par rapport à tous les autres, les s points situés à une distance unité le long de ces axes et l'origine seront les $s+1$ sommets du simplex.

(ii) *Le cube* est la généralisation du carré ou du cube ordinaire. Dans un référentiel à axes Cartésiens orthogonaux, les 2^s sommets d'un cube ont les coordonnées $(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$.

(iii) *La croix Cartésienne* est la généralisation de l'octaèdre. Dans un référentiel à axes Cartésiens orthogonaux, ses $2s$ sommets ont les coordonnées $(\pm 1, 0, \ldots, 0)$ $(0, \pm 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, \pm 1)$.

Pour $s \leqslant 4$ il y a d'autres polytopes réguliers, mais nous ne les considèrerons pas.

3. Les marches Markoviennes

La probabilité de passer d'un sommet à un autre ne dépend pas du passé.

(i) *Simplex*. Tous les sommets sont équidistants. Soit p la probabilité de rester immobile et q celle de passer à n'importe quel des s autres sommets. On a $p+sq = 1$. La matrice de transfert est:

$$M_{jk} = p\delta_{jk} + q(1-\delta_{jk}) = (p-q)\delta_{jk} + q,$$
$$j, k = 1, 2, \ldots, s+1,$$

où δ_{jk} est le symbole de Kronecker, valant 1 quand $j = k$ et zéro quand $j \neq k$. Soit

$$U_{jk} = (s+1)^{-1/2}\omega^{jk}, \qquad \omega = \exp[2\pi i/(s+1)].$$

Alors U est unitaire et U^+MU est diagonale. Ses éléments diagonaux sont

$$(U^+MU)_{jj} = p - q + q(s+1)\delta_{j,s+1}.$$

Après n étapes la probabilité de se retrouver au point de départ est donc:

$$(M^n)_{jj} = \frac{1}{s+1}[1 + s(p-q)^n],$$

et celle de trouver à n'importe quel autre point est

$$(M^n)_{jk} = \frac{1}{s+1}[1-(p-q)^n], \qquad j \neq k.$$

On retrouve ainsi le résultat obtenu par Dreitlein (1969) à partir de la théorie des groupes.

(ii) *Cube.* Avec les axes orthogonaux les coordonnées Cartésiennes d'un sommet du cube sont $\epsilon \equiv (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_s)$, où $\epsilon_j = 1$ ou -1 pour $j = 1, 2, \ldots, s$. La 'distance' entre deux sommets ϵ et η est égale au nombre de changements de signes entre ϵ et η, c'est-à-dire $\|\epsilon - \eta\| = \frac{1}{2}\Sigma_{j=1}^{s}(1-\epsilon_j\eta_j)$. Soit p_k la probabilité d'aller du sommet ϵ au sommet η, où $\|\epsilon-\eta\| = k$, $k = 0, 1, \ldots, s$. La conservation des probabilités s'écrit :

$$p_0 + sp_1 + \binom{s}{2}p_2 + \ldots + p_s \equiv \sum_{j=1}^{s} \binom{s}{j} p_j = 1,$$

et les éléments de la matrice de transfert :

$$M_{\epsilon\eta} \equiv M(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s; \eta_1, \ldots, \eta_s) = p_k,$$

si

$$\|\epsilon - \eta\| \equiv \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{s} (1-\epsilon_j\eta_j) = k.$$

Soit

$$U_{\epsilon\eta} = 2^{-\frac{1}{2}s}(-1)^{\frac{1}{4}\Sigma_{j=1}^{s}(1-\epsilon_j)(1-\eta_j)}.$$

On vérifie que $U^2 = I$ (I est la matrice unité), et que UMU est diagonale :

$$U^2_{\epsilon\eta} = \sum_{\xi} U_{\epsilon\xi}U_{\xi\eta} = \frac{1}{2^s} \sum_{\xi_1=\pm 1} \cdots \sum_{\xi_s=\pm 1} (-1)^{\frac{1}{4}\Sigma_{j=1}^{s}(1-\xi_j)(2-\epsilon_j-\eta_j)}.$$

La somme sur ξ_j donne

$$\sum_{\xi_j=\pm 1} (-1)^{\frac{1}{4}(1-\xi_j)(2-\epsilon_j-\eta_j)} = 1 + (-1)^{\frac{1}{2}(2-\epsilon_j-\eta_j)} = 2\delta_{\epsilon_j\eta_j}.$$

On a donc

$$U^2_{\epsilon\eta} = \delta_{\epsilon_1\eta_1}\delta_{\epsilon_2\eta_2} \ldots \delta_{\epsilon_s\eta_s} \equiv \delta_{\epsilon\eta}.$$

De même,

$$(UMU)_{\epsilon\eta} = \sum_{\xi,\theta} U_{\epsilon\xi}p_k U_{\theta\eta},$$

où

$$k = \|\xi - \theta\| \equiv \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{s} (1-\xi_j\theta_j).$$

Le coefficient de p_0 s'obtient pour $\xi = \theta$. Celui de p_1 s'obtient si $\theta_j = \xi_j$ pour tous j sauf un, par example $\theta_1 = -\xi_1, \theta_2 = \xi_2, \ldots, \theta_s = \xi_s$. De même pour avoir le coefficient de p_j, on doit prendre j des θ distincts des ξ correspondants et les $(s-j)$ autres θ égaux aux ξ correspondants. Chaque fois que $\theta_j = \xi_j$, la somme sur ξ_j donne $2\delta_{\epsilon_j\eta_j}$ comme précédemment. Chaque fois que $\theta_j = -\xi_j$, la somme sur ξ_j donne $2\epsilon_j\delta_{\epsilon_j\eta_j}$ par un calcul analogue. Le coefficient de p_j est donc

$$\delta_{\epsilon\eta} \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots k_j \leqslant s} \epsilon_{k_1}\epsilon_{k_2} \ldots \epsilon_{k_j}.$$

Ainsi nous trouvons que

$$(UMU)_{\epsilon\eta} = \delta_{\epsilon\eta}\left(p_0 + p_1 \sum_{k=1}^{s} \epsilon_k + p_2 \sum_{1\leqslant k_1<k_2\leqslant s} \epsilon_{k_1}\epsilon_{k_2} + \ldots + p_s\epsilon_1\ldots\epsilon_s\right),$$

et

$$(M^n)_{\epsilon\eta} = \sum_{\theta} U_{\epsilon\theta}U_{\theta\eta}\left(\sum_{j=0}^{s} p_j \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{s-k}{j-l}\binom{k}{l}\right)^n,$$

$$k = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}(1-\theta_j).$$

Par exemple, après n étapes la probabilité de se trouver sur un sommet à distance l du point de départ s'obtient en prenant

$$\epsilon = (1, 1, \ldots, 1), \qquad \text{et} \qquad \eta = (\underbrace{-1, \ldots, -1}_{l\ \text{fois}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{s-l\ \text{fois}})$$

$$p_l^{(n)} \equiv (M^n)\,(\underbrace{1, \ldots, 1}_{s};\ \underbrace{-1, \ldots, -1}_{l},\ \underbrace{1, \ldots, 1}_{s-l})$$

$$= 2^{-s}\sum_{k=0}^{s}\left(\sum_{\alpha=0}^{k}(-1)^{\alpha}\binom{s-l}{k-\alpha}\binom{l}{\alpha}\right)\left(\sum_{j=0}^{s} p_j \sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{s-k}{j-m}\binom{k}{m}\right)^n.$$

(iii) *Croix Cartésienne.* Les $2s$ sommets sont $x_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, $y_j = (0, \ldots, -1, \ldots, 0)$ où la seule coordonnée non-nulle est $+1$ ou -1 dans la j-ième position, $j = 1, 2, \ldots, s$. Pour le sommet x_j tous les autres sommets sauf y_j sont à distance égale. Soit p la probabilité de ne pas bouger, q la probabilité d'aller sur un sommet voisin quelconque, et r la probabilité d'aller sur le sommet opposé. On a $p+2(s-1)q+r = 1$. La matrice de transfert s'écrit :

$$M_{x_jx_j} = M_{y_jy_j} = p, \qquad M_{x_jy_j} = M_{y_jx_j} = r,$$
$$M_{z_jz_k} = q, \qquad j \neq k,$$

où z_j représente soit x_j soit y_j. Soit :

$$U_{x_jx_k} = U_{x_jy_k} = U_{y_jx_k} = (2s)^{-1/2}\omega^{jk},$$
$$U_{y_jy_k} = -(2s)^{-1/2}\omega^{jk}, \qquad \omega = \exp(2\pi i/s).$$

On vérifie alors que $U^+U = I$ et que U^+MU est diagonale avec les éléments

$$(U^+MU)_{x_jx_k} = \delta_{jk}(p-2q+r+2sq\delta_{js}),$$
$$(U^+MU)_{y_jy_k} = \delta_{jk}(p-r),$$
$$(U^+MU)_{x_jy_k} = (U^+MU)_{y_jx_k} = 0.$$

On a donc:

$$p^{(n)} = (M^n)_{x_j x_j} = (M^n)_{y_j y_j} = \frac{1}{2s}[1+s(p-r)^n+(s-1)(p-2q+r)^n],$$

$$q^{(n)} = (M^n)_{z_j z_k} = \frac{1}{2s}[1-(p-2q+r)^n], \qquad j \neq k,$$

$$r^{(n)} = (M^n)_{x_j y_j} = (M^n)_{y_j x_j} = \frac{1}{2s}[1-s(p-r)^n+(s-1)(p-2q+r)^n],$$

où de nouveau z_j indique indifféremment x_j ou y_j.

4. Les marches avec mémoire d'une étape sur un simplex

Supposons que le marcheur ne reste jamais stationnaire; soit p la probabilité de retracer dans le sens inverse l'étape qu'il vient de prendre et q la probabilité d'une autre étape quelconque. La matrice de transfert, d'ordre $s(s+1)$, peut être écrite

$$M_{jk,lm} = \delta_{kl}[(p-q)\delta_{jm}+q], \qquad j \neq k,\ l \neq m,\ j,k,l,m = 1,2,\ldots,s+1. \tag{3.1}$$

La conservation des probabilités donne

$$p+q(s-1) = 1. \tag{3.2}$$

Soit λ une valeur propre de M et B le vecteur propre correspondant dont les $s(s+1)$ composantes sont les quantités B_{jk} définies pour $j,k = 1,2,\ldots,s+1$, à l'exception des valeurs $j = k$:

$$\begin{aligned}\lambda B_{jk} = (MB)_{jk} &= \sum_{\substack{l,m=1\\ l\neq m}}^{s+1} M_{jk,lm}B_{lm} \\ &= (p-q)B_{kj}+qa_k,\end{aligned} \tag{3.3}$$

avec

$$a_k = \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{s+1} B_{kl}. \tag{3.4}$$

Ou encore en échangeant j et k,

$$\begin{aligned}\lambda B_{jk}-(p-q)B_{kj} &= qa_k,\\ -(p-q)B_{jk}+\lambda B_{kj} &= qa_j,\end{aligned} \tag{3.5}$$

d'où l'on tire

$$[\lambda^2-(p-q)^2]B_{jk} = q[\lambda a_k+(p-q)a_j]. \tag{3.6}$$

Effectuant la somme sur $k = 1,\ldots,s+1$, $k \neq j$, et puis sur $j = 1,\ldots,s+1$, nous trouvons

$$[\lambda^2-(p-q)^2]a_j = q[\lambda(A-a_j)+s(p-q)a_j], \tag{3.7}$$

$$[\lambda^2-(p-q)^2]A = qs[\lambda+(p-q)]A, \tag{3.8}$$

où

$$A = \sum_{j=1}^{s+1} a_j. \tag{3.9}$$

Supposons d'abord que $A \neq 0$. L'equation (3.8) donne alors

$$\lambda^2 - (p-q)^2 = qs[\lambda + (p-q)]$$

ou encore

$$(\lambda + p - q)(\lambda - p + q - qs) = 0, \tag{3.10}$$

et l'equation (3.7) indique que a_j ne dépend pas de j, $a_j = a$. Pour $\lambda = p-q+qs$, l'équation (3.6) nous donne

$$B_{jk} = \text{constant}. \tag{3.11}$$

Par contre pour $\lambda = -(p-q)$, l'équation (3.6) se réduit à une identité, mais l'équation (3.5) donne

$$B_{jk} + B_{kj} = -\frac{q}{p-q} a$$

et en effectuant la somme sur j et k, $j, k = 1, \dots, s+1$, $j \neq k$, on arrive après quelques simplifications à $q = p+1$. La dernière égalité est absurde puisque $0 \leqslant p$, $qs \leqslant 1$. Donc pour $A \neq 0$, la valeur propre unique est

$$\lambda = p - q + qs = 1, \tag{3.12}$$

avec le vecteur propre (3.11).

Supposons maintenant que $A = 0$, mais que les a_j ne sont pas tous nuls. L'équation (3.7) nous donne alors

$$\lambda^2 - (p-q)^2 = q[-\lambda + s(p-q)] \rightarrow \lambda^2 + q\lambda = p - q,$$

ou encore

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\{-q \pm [q^2 + 4(p-q)]^{1/2}\}. \tag{3.13}$$

Pour un choix quelconque des a_j, avec $\Sigma_{j=1}^{s+1} a_j = A = 0$, (il y en a s linéairement indépendants), et pour chacune des deux valeurs de λ ci-dessus, l'équation (3.6) donne les B_{jk}. Les valeurs propres λ données par l'équation (3.13) sont ainsi chacune s fois degénérées.

Supposons enfin que tous les a_j soient nuls. Dans ce cas, les équations (3.5) nous donnent soit:

$$\lambda = p - q \qquad \text{et} \qquad B_{jk} = B_{kj}, \tag{3.14}$$

ou

$$\lambda = -(p-q) \qquad \text{et} \qquad B_{jk} = -B_{kj}. \tag{3.15}$$

Dans le premier cas les $\frac{1}{2}s(s+1)$ quantités B_{jk}, $1 \leqslant j < k \leqslant s+1$ sont liées par $s+1$ relations indépendantes, $a_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, s+1$. La valeur propre $p-q$ est donc $\frac{1}{2}s(s+1) - (s+1) = \frac{1}{2}(s-2)(s+1)$ fois degénérée. Dans le deuxième cas les relations $a_j = 0$ ne sont pas toutes indépendantes; la dernière, par exemple, se déduit des s autres, qui, elles, sont indépendantes. La valeur propre $-(p-q)$ est ainsi $\frac{1}{2}s(s+1) - s = \frac{1}{2}s(s-1)$ fois dégénérée.

En résumé, les valeurs propres et les vecteurs propres de M sont réunis sur le tableau 1.

Tableau 1.

Valeur propre	Vecteur propre	Dégénérescence
$\lambda = 1$	$B_{jk}(1) = \text{cte} = [s(s+1)]^{-1/2}$	1
$\lambda = \lambda_+ \equiv \frac{1}{2}\{-q+[q^2+4(p-q)]^{1/2}\}$	$B_{jk}^{(\alpha)}(\lambda_+) = C_+(\alpha)[(p-q)a_j(\alpha)+\lambda_+ a_k(\alpha)]$,	
	$a_1(\alpha), \ldots, a_{s+1}(\alpha)$ quelconques vérifiant	s
	$\sum_{j=1}^{s+1} a_j(\alpha) = 0.$	
$\lambda = \lambda_- \equiv \frac{1}{2}\{-q-[q^2+4(p-q)]^{1/2}\}$	$B_{jk}^{(\alpha)}(\lambda_-) = C_-(\alpha)[(p-q)a_j(\alpha)+\lambda_- a_k(\alpha)]$,	s
	$a_1(\alpha), \ldots, a_{s+1}(\alpha)$ quelconques vérifiant	
	$\sum_{j=1}^{s+1} a_j(\alpha) = 0$	
$\lambda = p-q$	$B_{jk}^{(\alpha)}(p-q) = B_{kj}^{(\alpha)}(p-q)$ quelconques vérifiant	$\frac{1}{2}(s-2)(s+1)$
	$\sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq j)}}^{s+1} B_{jk}^{(\alpha)}(p-q) = 0, \qquad j = 1, \ldots, s+1.$	
$\lambda = -p+q$	$B_{jk}^{(\alpha)}(-p+q) = -B_{kj}^{(\alpha)}(-p+q)$ quelconques vérifiant	$\frac{1}{2}s(s-1)$
	$\sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq j)}}^{s+1} B_{jk}^{(\alpha)}(-p+q) = 0, \qquad j = 1, \ldots, s+1.$	
	Total	$s(s+1) =$ l'ordre de M

Pour diagonaliser M on a encore à choisir des bases orthogonales dans les espaces des valeurs propres dégénérées de M, ce qui n'est pas facile surtout pour les valeurs propres $\lambda = \pm(p-q)$. Mais pour écrire explicitement un élément quelconque de M^n on peut se contenter d'écrire M sous la forme

$$M = \sum_{\lambda} \lambda P(\lambda) \tag{3.16}$$

où la somme sur λ porte sur les cinq valeurs propres $\lambda = 1$, $p-q$, $-p+q$, λ_+ et λ_-. Les projecteurs $P(\lambda)$ vérifient les relations

$$P(\lambda)P(\lambda') = \delta_{\lambda\lambda'}P(\lambda). \tag{3.17}$$

En effet, les $P(\lambda)$ s'écrivent comme

$$[P(\lambda)]_{jk,lm} = \sum_{\alpha} B^{(\alpha)}_{jk}(\lambda)\bar{B}^{(\alpha)}_{lm}(\lambda), \tag{3.18}$$

où les $B^{(\alpha)}(\lambda)$ sont les vecteurs propres à droite de M qu'on vient d'indiquer dans le tableau ci-dessus, et les $\bar{B}^{(\alpha)}(\lambda)$ sont les vecteurs propres à gauche de M qu'on peut déterminer par un calcul analogue. Pour $\lambda = 1$, $p-q$ et $-p+q$ les vecteurs propres à gauche de M sont identiques à ceux à droite, tandis que pour $\lambda = \frac{1}{2}\{-q\pm[q^2+4(p-q)]^{1/2}\}$ les vecteurs propres à gauche $\bar{B}^{(\alpha)}_{jk}(\lambda_\pm)$ sont liés aux vecteurs propres à droite $B^{(\alpha)}_{jk}(\lambda_\pm)$ par la relation

$$\bar{B}^{(\alpha)}_{jk}(\lambda_\pm) = B^{(\alpha)}_{kj}(\lambda_\pm). \tag{3.19}$$

Utilisant les expressions de B_{jk} données dans le tableau 1 on voit après quelques simplifications élémentaires que

$$\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{s+1} \bar{B}^{(\alpha)}_{jk}(\lambda)B^{(\beta)}_{jk}(\lambda') = 0, \qquad \text{si } \lambda \neq \lambda', \tag{3.20}$$

et

$$\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{s+1} \bar{B}^{(\alpha)}_{jk}(\lambda_\pm)B^{(\beta)}_{jk}(\lambda_\pm) = \bar{C}_\pm(\alpha)C_\pm(\beta)\sum_{j=1}^{s+1} \bar{a}_j(\alpha)a_j(\beta). \tag{3.21}$$

Nous choisirons les $C_\pm(\alpha)$, $\bar{C}_\pm(\alpha)$, $a_j(\alpha)$, $\bar{a}_j(\alpha)$ tels que

$$\bar{C}_\pm(\alpha)C_\pm(\alpha) = 1, \tag{3.22}$$

et

$$\sum_{j=1}^{s+1} \bar{a}_j(\alpha)a_j(\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \tag{3.23}$$

pour que la relation (3.17) soit vérifiée. Par exemple, on peut prendre

$$\bar{a}_j(\alpha) = \omega^{-j\alpha}(s+1)^{-1/2}, \qquad a_j(\alpha) = \omega^{j\alpha}(s+1)^{-1/2}, \tag{3.24}$$

avec $\omega = \exp[2\pi i/(s+1)]$. Après un calcul élémentaire mais un peu long, on trouve

$$(P(\lambda_+)+P(\lambda_-))_{jk,lm} = \frac{1}{s^2-1}[\delta_{kl}+\delta_{jm}+s(\delta_{km}+\delta_{jl})-2] \tag{3.25}$$

$$(P(\lambda_+)-P(\lambda_-))_{jk,lm}$$

$$= \frac{1}{(s^2-1)[q^2+4(p-q)]^{1/2}}\{(2s-q)\delta_{kl}+[2s(p-q)+q]\delta_{jm}+(p-q+1) \times(\delta_{km}+\delta_{jl}-2)\}. \tag{3.26}$$

Et on a aussi:

$$(P(1))_{jk,lm} = \frac{1}{s(s+1)}. \tag{3.27}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les projecteurs $P(p-q)$ et $P(-p+q)$. Au lieu de choisir les bases orthogonales appropriées nous utiliserons l'artifice suivant (des Cloizeaux, communication privée; je lui suis reconnaissant pour cette astuce). On sait que

$$\sum_\lambda P(\lambda) = I, \tag{3.28}$$

où I est la matrice unité. De (3.25), (3.27) et (3.28) on tire:

$$(P(p-q)+P(-p+q))_{jk,lm}$$

$$= \delta_{jl}\delta_{km}+\frac{1}{s(s-1)}-\frac{1}{s^2-1}[\delta_{kl}+\delta_{jm}+s(\delta_{km}+\delta_{jl})]. \tag{3.29}$$

Si on échange les indices l et m, les $\bar{B}^{(\alpha)}_{lm}(p-q)$ et donc $P(p-q)$ ne changent pas, tandis que les $\bar{B}^{(\alpha)}_{lm}(-p+q)$ et donc $P(-p+q)$ changent de signe. On obtient ainsi

$$(P(p-q)-P(-p+q))_{jk,lm}$$

$$= \delta_{jm}\delta_{kl}+\frac{1}{s(s-1)}-\frac{1}{s^2-1}[\delta_{km}+\delta_{jl}+s(\delta_{kl}+\delta_{jm})], \tag{3.30}$$

d'où l'on tire $P(-p+q)$ et $P(p-q)$.

On peut enfin écrire la formule explicite:

$$(M^n)_{jk,lm} = \sum_\lambda \lambda^n P(\lambda) = \frac{1}{s(s+1)}+(p-q)^n P(p-q)+(-p+q)^n P(-p+q)+(\lambda_+)^n P(\lambda_+) +(\lambda_-)^n P(\lambda_-), \tag{3.31}$$

où $\lambda_\pm = \frac{1}{2}\{-q\pm[q^2+4(p-q)]^{1/2}\}$, et les $P(\lambda)$ sont donnés par les équations (3.25), (3.26), (3.27), (3.29) et (3.30).

Remerciements

Je suis reconnaissant à mes collègues Y Pommeau pour avoir suggéré le problème et à J des Cloizeaux et A Gervois pour maintes discussions utiles.

Références

Coxeter H S M 1948 *Regular Polytopes* (London: Metheun)

Dreitlein J 1969 *Lectures in Theoretical Physics* vol IID, eds K T Mahantappa et W E Brittin (New York: Gordon and Breach) pp 1–42